УДК 125

Серегина Т.В.
кандидат философских наук, доцент
кафедры логики, философии и методологии науки Орловский
государственный университет им. И.С. Тургенева

Ноздрунов В.В.
кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры информатики, Орловский государственный университет им.
И.С. Тургенева

Проблема бесконечности в философии и математике

В данной статье обсуждается проблема интерпретации бесконечности в философии и математике. Авторы обращаются к историческому аспекту проблемы и современным тенденциям ее осмысления.

Ключевые слова: бесконечность; континуум; актуальная бесконечность; потенциальная бесконечность; множество всех множеств; познаваемость бесконечности.

The problem of infinity in philosophy and mathematics

The article discusses the problem of interpreting infinity in philosophy and mathematics. The authors turn to the historical aspect of the problem and contemporary trends in its comprehension.

Keywords: infinity, continuum, actual infinity, potential infinity, set of all sets, knowability of infinity.

В повседневной опыте мы имеем дело только с конечными величинами, явлениями или объектами, существующими в определенных временных и пространственных границах. Выросшая из философских учений древних, наука постепенно освобождалась от наглядных представлений, все более и более абстрагировалась, чтобы охватить постоянно расширяющиеся области знания. Через познание конечных объектов и явлений в науке сформировалось понятие бесконечности в мире, да и сам процесс познания оказался бесконечным. Таким образом, понятие бесконечности оказалось неразрывно связанным с понятием континиума. Эти понятия дополняют друг друга: бесконечность наделяется качеством непрерывности, а непрерывный континиум – неизмеримости. Они являются фундаментальными в философии (особенно в онтологии), математике и физике. Существование этих понятий имеет длительную историю. Древние греки, чтобы отличить конечное от бесконечного пришли к выводу, что бесконечное не имеет начала, конца или предела, оно неограниченно и беспредельно, в нем нет структуры и порядка.

Оперирование с бесконечностями часто приводило к логическим парадоксам, которые древние греки, не имея ни фактов, ни методов исследования, разрешали в логических спорах, вводя в свои рассуждения новые понятия. Примером этого может служить обсуждение ими проблем делимости тел, времени и пространства. По Анаксагору, бесконечное число элементов материи при сочетаниях дают все многообразие вещей, а процесс деления бесконечен, т. е. не существует наименьших неделимых частиц. Демокрит, напротив, признавая бесконечность Вселенной и числа атомов в ней, считал атомы "неделимыми". Впрочем, такая концепция позволила ему решить задачу об объеме пирамиды. Зенон Элейский, обладавший парадоксальным мышлением, сумел показать, что обе концепции содержат рациональные зерна и обе же ведут к противоречиям (апориям). Оказалось, что и бесконечная делимость (т. е. непрерывность) пространства и времени, и существование неделимых элементов (т. е. дискретность пространства и времени) ведут в тупик.

Конечно, эти всем известные противоречия можно было бы не рассматривать, но к ним постоянно возвращались последующие поколения и философов и математиков.

Выдающийся физик XX столетия Вернер Гейзенберг полагал, что невозможно было бы разрабатывать атомную физику, не зная греческой натурфилософии и что «современное естествознание во многих отношениях примыкает к древнегреческой натурфилософии, возвращаясь к тем проблемам, которые пыталась разрешить эта философия в своих первых попытках понять окружающий мир». Идеи Зенона относительно протяженности перекликаются с некоторыми современными идеями. Например, движение элементарных частиц происходит так, как будто частица исчезает в одной пространственной ячейке и возрождается в другой, или частица регенерирует в результате взаимодействия с вакуумом. В современной физике микромира введены понятия элементарной длины и элементарного интервала времени. Те же апории Зенона наводят на мысль о том, что для объяснения сущности движения и покоя нужно отталкиваться от чего-то лишенного длительности и протяженности. Это может быть поле или вакуум, которые являются формами существования материи.

В XVII в. от абстрактных рассуждений мудрецов античности о бесконечном перешли к практическим операциям с ним. Трудами ученых, в основном Лейбница и Ньютона, был создан математический анализ. При этом считалось (хотя и не совсем корректно), что прибавление бесконечно малого не изменяет конечного слагаемого.

Иммануил Кант интересовался бесконечностью мира во времени и пространстве, но понимал ее, вслед за Декартом, как протяженность. Он обращался к апориям Зенона, чтобы доказать: это понятие является плодом нашего ума и не применимо к реальному миру. Бесконечность есть абстракция чистого разума. «Это расхождение между чувственной и рассудочной способностью указывает только на то, что ум часто не может выразить конкретно и превратить в созерцание те абстрактные идеи, которые он получил от рассудка. Но эта субъективная трудность, как это нередко бывает, ошибочно кажется каким-то объективным противоречием и легко вводит в заблуждение людей неосмотрительных, заставляя их принимать границы человеческого ума за пределы…», — писал И. Кант [5, с. 827]. Бесконечное невозможно определить в понятиях опыта, так как оно выходит за пределы пространства мышления, которое его мыслит.

Английский философ Джордж Беркли, считавший, что "существовать, значит быть воспринимаемым", называл бесконечно малые "тенями усопших величин". Здесь мы сталкиваемся с проблемой познаваемости бесконечного.

Уже древние греки считали, что познание бесконечного невозможно. Например, Пифагор рассматривал бесконечность как сущность, которая не имеет реалий в нашем мире. Они появляются только тогда, когда на бесконечность накладываются математические ограничения: точка, линия, плоскость и др.

В Средневековье бесконечность считалась атрибутом Бога, сущность которого непостижима, связана с непостижимостью бесконечного. «Бесконечное не поддаётся познанию, поскольку не поддаётся счислению: сосчитать части бесконечного — вещь сама по себе невозможная, поскольку содержит внутреннее противоречие»[1, с. 309], — полагал Фома Аквинский.

В Новое время Р. Декарт так же исходил из непостижимости бесконечного: «Не следует пытаться постичь бесконечное и … надлежит лишь полагать неопределённым всё, чему мы не находим границ» [4, с. 437]. А Ф.Бэкон считал, что: «...мысль не в состоянии охватить предел и конец мира, но всегда как бы по необходимости представляет как бы существующим ещё далее. Невозможно так же мыслить, как вечность дошла до сегодняшнего дня. Ибо обычное мнение, различающее бесконечность в прошлом и бесконечность в будущем, никоим образом несостоятельно, так как отсюда следовало бы, что одна бесконечность больше другой и что бесконечность сокращается и склоняется к конечному. Из того же бессилия мысли проистекает ухищрение о постоянно делимых линиях» [2].

Таким образом, большинство философов признавали непознаваемость бесконечного.

Такая же позиция была у многих математиков. Например, известный математик Гаусс писал: «В математике бесконечную величину никогда нельзя использовать как нечто окончательное; бесконечность — не более чем facon de parle, означающая предел, к которому стремятся одни величины, когда другие бесконечно убывают» [8, с. 232]. Другой известный математик Д. Гильберт пришел к выводу: «В реализованном виде бесконечное не встречается нигде. Его нет в природе, и оно также недопустимо и в качестве основы нашего разумного мышления, — достойный внимания пример гармонии между бытием и мышлением» [3, с. 448].

Казалось бы, что выводы, сделанные большинством философов и математиков, не позволяют познать бесконечное. Однако уже Ф. Энгельс, будучи диалектиком, пришел к выводу, что познание бесконечного окружено разного рода трудностями, и «бесконечное столь же познаваемо, сколь и непознаваемо » [10, с. 126].

Способы построения и познания бесконечного можно найти у А. С.

Кармина в работе «Познание бесконечного» [6]. По его мнению, познать бесконечное можно при помощи трёх уровней. Первый уровень — уровень «эмпирической констатации факта невозможности зафиксировать границы каких-либо конкретных объектов». Второй уровень — уровень перевода качественной характеристики «неограниченность» в количественную характеристику, т. е. в количественную бесконечность. Третий уровень — метафизический. Он заключается в том, что снимаются всякие абстракции и ограничения, на которых базируются представления о бесконечности. По-видимому, этот уровень может примерить и философов и математиков, поскольку современное понятие «бесконечность» следует рассматривать с позиций и философии, и математики. В «Новой философской энциклопедии» мы читаем: «Бесконечное (бесконечность) — философское понятие, обозначающее безграничность и беспредельность как в бытийственном, так и в познавательном смысле» [7. Т.1. С. 246]. Это определение затрагивает все области бытия в отличие от математического, где «бесконечность — понятие, возникающее в различных разделах математики в основном как противопоставление понятию конечного» [9, с. 92]. Оно не является определением в строгом смысле этого слова, это чисто утилитарное математическое понятие.

В 1784 г. Берлинская академия наук, президентом которой был выдающийся механик и математик Жозеф Луи Лагранж, даже объявила конкурс на тему "о строгой и ясной теории того, что в математике называют бесконечным". Выход из кризиса был найден в теории пределов: бесконечно малая — это переменная величина, предел которой равен нулю, т. е. начиная с некоторого момента численные значения этой величины становятся меньше наперед заданного малого положительного числа, или — бесконечно малые должны рассматриваться как процесс. Гильберт называл математический анализ "единой симфонией бесконечного", хотя уже тогда возникло много парадоксов с бесконечностями, особенно в области теории множеств (некоторые из них не разрешены и по сей день). Рассмотрим, например, парадокс Кантора. Предположим, что множество всех множеств $V=\{x|x=x\}$существует. В этом случае справедливо $\forall x \forall t(x\in t \Rightarrow x\in V)$, то есть всякое множество t является подмножеством V. Но из этого следует $\forall t\ |t|\le|V|$ — мощность любого множества не превосходит мощности V. Но в силу аксиомы множества всех подмножеств, для V, как и любого множества, существует множество всех подмножеств *P(V)*, и по теореме Кантора $|P(V)|=|2^V|>|V|$, что противоречит предыдущему утверждению. Следовательно, V не может существовать, что вступает в противоречие с «наивной» гипотезой о том, что любое синтаксически корректное логическое условие определяет множество, то есть что $\exists y \exists z(x\in y \Leftrightarrow A)$ для любой формулы A, не содержащей y свободно.

Парадокс Кантора и другие, обнаруженные в теории множеств, которая полагалась основанием математики, привели к определенным трудностям обоснования математики в конце XIX – начале XX вв. Оперирование в математике с бесконечностями потребовало их репрезентации в теории множеств. Так были введены понятия бесконечных множеств и множества всех множеств.

Теория множеств построена на понятии актуальной бесконечности. В ней мы оперируем с множеством натуральных, рациональных, действительных и т.п. чисел как с завершенными совокупностями, отвлекаясь от того факта, что актуально не можем построить ни одного из этих множеств во всех его элементах. Подобная идеализация оказалась весьма полезной, но и она не смогла уберечь традиционную теорию множеств от логических противоречий, возникающих из неопределенности понятия бесконечного множества. В современных аксиоматических теориях множеств вводятся ограничения на процесс образования одних множеств на основе других, достаточных для того, чтобы избежать известных парадоксов. Однако это не обеспечивает абсолютной гарантии от противоречий какого-либо нового типа.

Кроме актуальной, в математическую теорию вводится потенциальная бесконечность, которую можно определить как неограниченную последовательность, возникающую в силу потенциально осуществимого процесса построения. Например, когда пишем несколько первых натуральных чисел и ставим многоточие, то предполагаем принципиальную возможность произвольного продолжения ряда до какого угодно большого числа, хотя фактической возможности этого для достаточно больших чисел нет.

В основном все математические теории в той или иной форме связаны с допущением бесконечности. Различные ее трактовки, дополняя друг друга, способствуют развитию математической теории. В математике понятие бесконечности рассматривается в гносеологическом плане, как элемент понятийных систем. Оно не связано с существованием реальной бесконечности в мире. Существование различных типов бесконечности, различных ее трактовок, позволяет сделать вывод, что решение проблемы бесконечности является комплексной: необходимо учитывать и философский и математический подходы к ее решению.

Список литературы

1. Аквинский, Ф. Сумма против язычников. Кн.1. Долгопрудный: Вестком, 2000. 463 с.
2. Бекон, Ф. Афоризмы об истолковании природы и царстве человека // Сочинения: В 2-х т. М.: Мысль, 1977-1978. Т. 2., 1988. С. 21
3. Гильберт, Д. О бесконечном // Избранные труды: В 2 т. Т.1. Теория инвариантов. Теория чисел. Алгебра. Геометрия. Основания математики. М.: Изд-во «Факториал», 1998. С. 431-448.
4. Декарт, Р. Начала философии // Избранные произведения. М.: Изд-во полит. литературы, 1950. С. 409-544.
5. Кант, И. О форме и принципах чувственно воспринимаемого и умопостигаемого мира // Метафизические начала естествознания. М.: Мысль, 1999. С. 823 – 867.

6. Кармин, А. С. Познание бесконечного. М.: Мысль, 1981. 229 с.
7. Катасонов, В. Н. Бесконечное // Новая философская энциклопедия: В 4-х тт. М.: Мысль, 2000.
8. Клайн, М. Математика. Утрата определённости. М.: Мир, 1984. 434 с.
9. Колмогоров, А. Н. Бесконечность // Математический энциклопедический словарь. М.: Сов. Энциклопедия, 1988. С. 92-93.
10. Энгельс, Ф. Диалектика // Диалектика природы. М.: Гос. изд-во полит. литературы, 1955. 528 с.

References

1. Akvinskij, F. Summa protiv yazychnikov. Kn.1. Dolgoprudnyj: Vestkom, 2000. 463 s.
2. Bekon, F. Aforizmy ob istolkovanii prirody i carstve cheloveka // Sochineniya: V 2-h t. M.: Mysl', 1977-1978. T. 2., 1988. S. 21
3. Gil'bert, D. O beskonechnom // Izbrannye trudy: V 2 t. T.1. Teoriya invariantov. Teoriya chisel. Algebra. Geometriya. Osnovaniya matematiki. M.: Izd-vo «Faktorial», 1998. S. 431-448.
4. Dekart, R. Nachala filosofii // Izbrannye proizvedeniya. M.: Izd-vo polit. literatury, 1950. S. 409-544.
5. Kant, I. O forme i principah chuvstvenno vosprinimaemogo i umopostigaemogo mira // Metafizicheskie nachala estestvoznaniya. M.: Mysl', 1999. S. 823 – 867.
6. Karmin, A. S. Poznanie beskonechnogo. M.: Mysl', 1981. 229 s.
7. Katasonov, V. N. Beskonechnoe // Novaya filosofskaya ehnciklopediya: V 4-h tt. M.: Mysl', 2000.
8. Klajn, M. Matematika. Utrata opredelyonnosti. M.: Mir, 1984. 434 s.
9. Kolmogorov, A. N. Beskonechnost' // Matematicheskij ehnciklopedicheskij slovar'. M.: Sov. EHnciklopediya, 1988. S. 92-93.
10. EHngel's, F. Dialektika // Dialektika prirody. M.: Gos. izd-vo polit. literatury, 1955. 528 s.